Πραγματική Ανάλυση 13-11-17

Πως μπορεί κάποιος να διαβάσει τις σημειώσεις:

1) Διαβάζουμε τις εκφωνήσεις των Θεωρημάτων και την Θεωρία χωρίς να διαβάσουμε καμία απόδειξη (τουλάχιστον 2 φορές)

2) Διαβάζουμε τις ασκήσεις, να κατανοήσουμε όχι να την απομνημονεύσουμε (τουλάχιστον 2 φορές)

3) Διαβάζουμε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων της Θεωρίας (τουλάχιστον 2 φορές).

Ξανά επανάληψη:

▶ Έστω σύνολο X, $\mathcal{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X και $\mu: \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ είναι σ-προσθετικό μέτρο.

Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$. Τότε:

(i) $\mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) Αν $\mu(A) < +\infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

$B = A \cup (B \setminus A)$, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ **(1)**

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

1) $\mu(B) < +\infty$ Άρα, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

2) $\mu(B) = +\infty$. Από, την **(1)** έπεται ότι: $\mu(B \setminus A) = +\infty = \mu(B) - \mu(A)$

Πρόταση: Έστω X να είναι σύνολο, $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X και $\mu: \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ να είναι ένα σ-προσθετικό μέτρο.

Έστω $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ να είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X που ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Τότε ισχύει: (χωρίς απόδειξη)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$$

Ονομάζεται η συγκεκριμένη ιδιότητα σ-υποπροσθετικότητα του μέτρου.

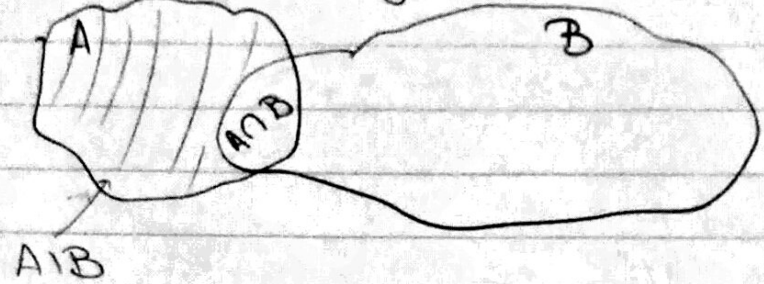
Ασκήσεις

1) Έστω X να είναι ένα σύνολο, $\mathcal{A}$ να είναι μια σ-άλγεβρα στο X και $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ να είναι ένα σ-προσθετικό μέτρο.
Έστω $A, B \in \mathcal{A}$. Τότε ισχύει $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$

$\mu(A) < +\infty$

Λύση

Πρώτα πρέπει να δείξουμε ότι $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$



Γενικά ισχύει $A \setminus B = A \cap B^c = A \cap (X \setminus B)$

Άρα $A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$
$= \emptyset \cup (A \cap B^c) = A \cap B^c = A \setminus B$ **(1)**

Εφόσον $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ και $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Από(1) έχουμε: $\mu(A \setminus B) = \mu(A \setminus (A \cap B))$ **(2)**

$A \cap B \subseteq A$

Από την μονοτονία του μέτρου έχουμε $\mu(A \cap B) \leq \mu(A) < +\infty$.

Άρα, και το $\mu(A \cap B) < +\infty$.

Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι $\mu(A \setminus (A \cap B)) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$ **(3)**

Από τις σχέσεις **(2)**, **(3)** έπεται ότι: $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$

□

ή

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$

$\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B)$

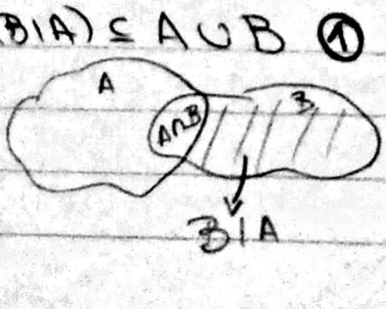
□

▶ ! $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \\ B \setminus A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \subseteq A \cup B \end{array}\right] \Rightarrow A \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B \quad (1)$$

Ισχύει $A \cup B \subseteq A \cup (B \setminus A)$ (2)

Από (1), (2) έχω την ισότητα



Ισχύει και για πεπερασμένο προσθετικό μέτρο — Παρατήρηση

2) Έστω X να είναι ένα σύνολο, $\mathcal{A}$ να είναι μια σ-Άλγεβρα στο X και $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ να είναι σ-προσθετικό. Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{A}$. Τότε ισχύουν: $\mu(A) < +\infty$, $\mu(B) < +\infty$, $\mu(\Gamma) < +\infty$

(i) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

(ii) $\mu(A \cup B \cup \Gamma) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\Gamma) - \mu(A \cap B) - \mu(B \cap \Gamma) - \mu(A \cap \Gamma) - \mu(A \cap B \cap \Gamma)$

Λύση

(i) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (1) $\qquad \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ (2)

Άρα από την (1) έχουμε: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, επειδή τα σύνολα $A, B \setminus A, A \cup B \in \mathcal{A}$ και τα A, $B \setminus A$ είναι ξένα και το μ είναι πεπερασμένο προσθετικό μέτρο, αφού είναι σ-προσθετικό μέτρο, από τις (1), (2). Επίσης $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$ (3) (από άσκηση 1).

Από τις σχέσεις (1) και (3) έπεται ότι:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

(ii) $\mu(A \cup B \cup \Gamma) = \mu((A \cup B) \cup \Gamma)$ (1) Από το (i) έχουμε:

$$\mu((A \cup B) \cup \Gamma) = \mu(A \cup B) + \mu(\Gamma) - \mu((A \cup B) \cap \Gamma) \quad (2)$$

Πάλι από το (i) έχουμε:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \quad (3)$$

$(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$ από την επιμεριστικότητα της τομής ως προς την ένωση (4)

Από την (4) έχουμε: $\mu((A \cup B) \cap \Gamma) = \mu((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) \stackrel{(i)}{=}$

$$= \mu(A \cap \Gamma) + \mu(B \cap \Gamma) - \mu(\underbrace{(A \cap \Gamma) \cap B(\cap \Gamma)}_{A \cap B \cap \Gamma}) \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3) (5) στην (2):

$$\mu(A \cup B \cup \Gamma) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\Gamma) - \mu(A \cap B) - (\mu(A \cap \Gamma) + \mu(B \cap \Gamma) - \mu(A \cap B \cap \Gamma))$$

$$= \mu(A) + \mu(B) + \mu(\Gamma) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap \Gamma) - \mu(B \cap \Gamma) + \mu(A \cap B \cap \Gamma)$$

$\square$

Ο τύπος αυτός μοιάζει με τον τύπο που έχουμε στις πιθανότητες, αφού και εκεί ορίσαμε μια σ-άλγεβρα. Και η πιθανότητα είναι μέτρο.

στο σχολείο

3) Έστω $A=[-4,3]\times[2,5]$, $B=[-3,4]\times[1,3]$

Να υπολογίσω τα $\mu(A\cap B)$, $\mu(A\cup B)$, $\mu(A\setminus B)$, $\mu(B\setminus A)$.

Λύση

Έστω X, Y σύνολα, με $A, B\subseteq X$, $\Gamma, \Delta\subseteq Y$

Τότε ισχύει:

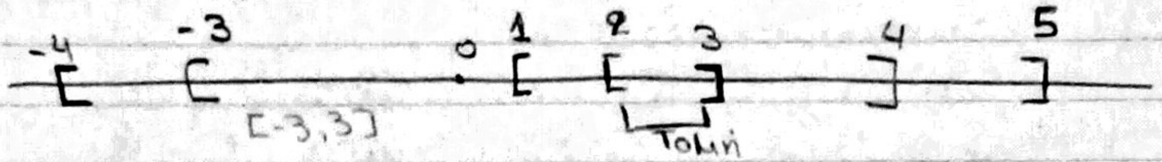
$$(A\times\Gamma)\cap(B\times\Delta)=(A\cap B)\times(\Gamma\cap\Delta)$$

(χωρίς απόδειξη)

Τα A, B είναι ορθογώνια και μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν χωρίς να ανατρ.: ΦΟΦΑΚΙ!

Ζουμε στο σχήμα

$$\mu(A\cap B)=\mu\big(([-4,3]\times[2,5])\cap([-3,4]\times[1,3])\big)$$
$$=\mu\big(([-4,3]\cap[-3,4])\times([2,5]\cap[1,3])\big)$$



$$=\mu([-3,3])\,\mu([2,3])=(3-(-3))\cdot(3-2)$$
$$=6\cdot 1=6$$

Έχω γράψει το μέτρο Lebesgue, διότι τα ορθογώνια είναι Lebesgue μετρήσιμα και το μέτρο τους ισούται με τον όγκο τους.

Σχόλιο!

Η τομή 2 ορθογωνίων είναι ορθογώνιο. Άρα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Άρα, μπορώ να υπολογίσω το μέτρο της τομής. Τα ορθογώνια είναι Lebesgue μετρήσιμα => Θεώρημα. Δηλαδή, $A\cap B$ Lebesgue μετρήσιμο, άρα μπορώ να υπολογίσω το μέτρο του.

Παρατήρηση!

$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$

$\mu(A)=V(A)\overset{\text{ορ}}{=}\mu([-4,3])\,\mu([2,5])=(3-(-4))\,(5-2)=21$

$\mu(B)=V(B)\overset{\text{ορ}}{=}\mu([-3,4])\cdot\mu([1,3])=(4-(-3))\cdot(3-1)=14$

Άρα, $\mu(A\cup B)=21+14-6=29$

$\mu(A\setminus B)=\mu(A)-\mu(A\cap B)=21-6=15$

$\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A\cap B)=14-6=8$

$\square$

4] $A=[-5,4]\times(-4,5]\times(-3,2]$

$B=(-4,6]\times[-6,4]\times[-1,3)$

$\mu(A\cap B)=;\quad \mu(A\cup B)=;\quad \mu(A\setminus B)=;\quad \mu(B\setminus A)=;$

Λύση

Έστω σύνολα X, Y, Z, $A_1, A_2\subseteq X$, $B_1, B_2\subseteq Y$, $\Gamma_1,\Gamma_2\subseteq Z$
Ορίζεται το καρτεσιανό γινόμενο $X\times Y\times Z$
$(A_1\times B_1\times\Gamma_1)\cap(A_2\times B_2\times\Gamma_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\times(\Gamma_1\cap\Gamma_2)$

ΓΕΝΙΚΑ (ισχύει)

$\mu(A\cap B)=\mu([-5,4]\cap(-4,6])\times((-4,5]\times[-6,4])\times((-3,2]\cap[-1,3))$

$=\mu((-4,4]\times(-4,4]\times[-1,2])$ $\dfrac{\text{το μέτρο ενός ορθογωνίου}}{\text{ισούται με τον όγκο του}}$

$=V((-4,4]\times(-4,4]\times[-1,2])$

$=\mu((-4,4])\cdot\mu((-4,4])\cdot\mu([-1,2])$

$=(4-(-4))\cdot(4-(-4))\cdot(-2-(-1))=192$

$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$ (1)

$\mu(A)\overset{\text{Θεώρημα}}{=}V(A)\overset{\text{ορ}}{=}\mu([-5,4])\cdot\mu((-4,5])\cdot\mu((-3,2])$

$=(4-(-5))\cdot(5-(-4))\cdot(2-(-3))=405$ (2)

$\mu(B)\overset{\text{Θεώρημα}}{=}V(B)\overset{\text{ορ}}{=}\mu((-4,6])\cdot\mu([-6,4])\cdot\mu([-1,3))$

$=(6-(-4))\cdot(4-(-6))\cdot(3-(-1))=400$ (3)

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\mu(A\cup B)=613$

$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) = 405 - 192 = 213$

$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = 400 - 192 = 208$

Άρα, $\mu(A \cap B) = 192$

$\mu(A \cup B) = 613$

$\mu(A \setminus B) = 213$

$\mu(B \setminus A) = 208$